Formelsammlung

In dieser Formelsammlung finden Sie eine Auswahl der wichtigsten versicherungsmathematischen Formeln zur Berechnung von Pensionsrückstellungen.
Eingangs werden die Indizes und Variablen definiert, die in den darauf folgenden Formeln verwendet werden.

Allgemeine Definitionen und grundlegende Formeln

Verwendete Indizes

a	Aktiver
i	Invalider
r	Altersrentner
w	Witwer
g	Gesamtbestand
x	Alter in Jahren
z	Schlussalter für Aktive oder Invalide
ω	Schlussalter für Altersrentner, Witwen oder Witwer

Der Index x symbolisiert, dass es sich um Werte für Männer handelt. Bei Frauen wird der Index x durch y ersetzt.

Weitere Definitionen

i	Rechnungszins
v	Diskontierungsfaktor
y_x	Durchschnittliches Alter der Witwe in Abhängigkeit vom Alter des Versicherten

Wahrscheinlichkeiten

	Wahrscheinlichkeit, im Alter x...
z_x	...dem Aktivenbestand zuzugehen
q_x^a	...als Aktiver zu sterben
q_x^i	...als Invalider zu sterben
q_x^r	...als Rentner zu sterben
i_x	...Invalide zu werden
r_x	...als Invalider wieder reaktiviert zu werden
h_x	...bei Tod verheiratet zu sein
s_x	...als Aktiver ohne Leistungen bzw. Anwartschaften auszuscheiden (Stornierung)
q_y^w	...als Witwe im Alter y zu sterben
q_x	Gesamtwahrscheinlichkeit, im Alter x zu sterben
${}_i p_x$	i-jährige Überlebenswahrscheinlichkeit eines x-jährigen

Die entsprechenden Werte sind in den Heubeck Tabellen hinterlegt.

Bestände von Personengruppen

	Anzahl lebend x-jährige...
l_x	...Lebende
l_x^a	...Aktive
l_x^i	...Invalide
l_x^g	...Mitglieder des Gesamtbestandes
l_x^r	...Altersrentner
l_y^w	...Witwer

Die Bestände dieser Personengruppen werden wie folgt fortgeschrieben:

$l_{x+1} = (1 - q_x - i_x) \cdot l_x$		$0 \leq x \leq z$
$l_{x+1}^a = \left(1 - q_x^{aa} - i_x\right) \cdot l_x^a$	$l_{20}^a = 100.000$	$20 \leq x < z$
$l_{x+1}^i = \left(1 - q_x^i\right) \cdot l_x^i$	$l_{20}^i = 100.000$	$20 \leq x < z$
$l_{x+1}^g = \left(1 - q_x^g\right) \cdot l_x^g$	$l_{20}^g = 100.000$	$20 \leq x < z$
$l_{x+1}^r = \left(1 - q_x^r\right) \cdot l_x^r$	$l_z^r = l_z^g$	$z \leq x < \omega$
$l_{y+1}^w = \left(1 - q_y^w\right) \cdot l_y^w$	$l_{20}^w = 100.000$	$20 \leq y < \omega$

Die zugehörigen diskontierten Werte ergeben sich mit dem Diskontierungsfaktor

$$v = \frac{1}{1+i}$$

zu:

		Diskontierte...
$D_x = l_x v^x$	für $\forall x$	...Lebende
$D_x^a = l_x^a v^x$	$20 \le x \le z$	...lebende Aktive
$D_x^i = l_x^i v^x$	$20 \le x \le z$	...lebende Invalide
$D_x^g = l_x^g v^x$		...Gesamtbestand
$D_x^r = l_x^r v^x$	$z \le x$	...lebende Rentner
$D_y^w = l_y^w v^y$	$z \le x$	...lebende Witwer
$C_x = d_x v^{x+1}$		...Tote zwischen den Altern x und x+1

Daraus ergeben sich die aufsummierten diskontierten Personengruppen zu:

	Aufsummierte diskontierte...
$N_x = \sum_{t=x}^{\omega} D_t$	...Lebende
$N_x^a = \sum_{t=x}^{\omega-1} D_t^a$	...Aktive
$N_x^i = \sum_{t=x}^{\omega} D_t^i$	...Invalide
$N_x^r = \sum_{t=z-x}^{\omega-x} D_{x+t}^r$	...Rentner
$M_x = \sum_{t=x}^{\omega} C_t$	...Tote

Weitere Personengruppen können wie folgt berechnet werden:

Anzahl der Toten zwischen den Altern x und x+1

$$d_x = l_x - l_{x+1}$$

Anzahl der x+1 jährigen Invaliden im Jahr t+1

$$r_{x+1}(t+1) = r_x(t)(1 - q_x^i) + l_x(t) i_x (1 - \tfrac{1}{2} q_x^i)$$

Weitere Formeln der Versicherungsmathematik

Neben den eingeführten Definitionen finden folgende versicherungsmathematische Werte bei der Berechnung und Darstellung der Pensionsrückstellung Verwendung.

Mittlere Lebenserwartung

$$e_x = \frac{\sum_{t=x+1}^{100} l_t}{l_x} + \frac{1}{2}$$

Sterbeziffernmethode nach Farr

$$q_x^{ROH} = \frac{k_x}{1 + \frac{1}{2} k_x} = \frac{M_x(t)}{\overline{V}_x(t) + \frac{1}{2} M_x(t)}$$

Versicherungstechnisches Alter

$$x = \begin{cases} j - g + 1, & falls\ m < 7 \\ j - g & , sonst \end{cases}$$

mit

j betrachtetes Jahr

g Geburtsjahr

m Geburtsmonat

Ersatzzins

(Heubeck-Verweis: 3.6)

Der Zins kann für die Anwartschaftsphase und Rentenphase getrennt als i^a bzw. i^r vorgegeben werden. Falls eine Anwartschaftsdynamik bzw. Rentendynamik vorliegt, werden die Ersatzzinsen wie folgt ermittelt:

$$i' = \frac{1 + i}{1 + \sigma} - 1$$

Korrekturfaktoren

Korrekturfaktor für Leistungsdynamik

(Heubeck-Verweis: 3.6.1)

$$f(i,\sigma,t) = \frac{1}{t} \cdot \sum_{\lambda=0}^{t-2} \frac{t + \lambda \cdot i'}{t + \lambda \cdot i}$$

Korrekturfaktor für unterjährige Zahlung

(Heubeck-Verweis: 1.)

Der Korrekturfaktor $k(t)$ findet bei unterjähriger Zahlungsweise mit t Zahlungen Anwendung. Er ist vom Alter unabhängig.

$$k(t) = \frac{1+i}{t} \sum_{\lambda=0}^{t-1} \frac{\lambda}{t + \lambda \cdot i}$$

Korrekturfaktor für m unterjährige vorschüssige Zahlung

Bei der Berechnung von Pensionsrückstellungen wird häufig ein Korrekturfaktor für m unterjährige Zahlungen verwendet. In der Regel erfolgt eine monatliche Zahlungsweise, also m= 12. In der Formel wird der Wert als oben gesetzter Index dargestellt. Sollen die Formeln für ein beliebiges m abgebildet werden, ist dieser Index (12) durch (m) zu ersetzen.

$$k(m) = \frac{m-1}{2m} + \frac{m^2-1}{6m^2} \cdot i \cdot \left(1 - \frac{i}{2}\right)$$

Zu beachten ist, dass m zur Korrektur der Barwerte und z zur Ermittlung der Jahresrente bzw. des Jahresgehalts oder -sockelbetrages benötigt wird. So kann also durchaus z = 13 (13 Monatsgehälter, Rentenleistungen o.ä.) sein, während m = 12 (monatliche Auszahlung) beträgt.

Diskontierungsfaktor

(Heubeck-Verweis: 1.)

$$v = \frac{1}{1+i}$$

i	jährlicher Zins
r=(1+ i)	Aufzinsungsfaktor

Leistungsbarwert a_x

$$a_x = \sum_{t=x}^{100} v^{t-x} \cdot {}_{t-x}p_x = \sum_{t=0}^{100-x} v^t \cdot {}_t p_x$$

$$a_x = \frac{N_x}{D_x}$$

Invalidenbarwert a_x^i

$$a_x^i = \frac{N_x^i}{D_x^i}$$

Aktivenbarwert a_x^a

$$a_x^a = \frac{N_x^a}{D_x^a}$$

Anwartschaftsbarwert a_x^{ai}

$$a_x^{ai} = \frac{N_x^{ai}}{D_x^a}$$

$$N_x^{ai} = \sum_{t=x}^{100} D_t^{ai}$$

$$D_x^{ai} = D_x^a \cdot i_x \cdot a^i_{x+\frac{1}{2}} \cdot v^{\frac{1}{2}}$$

Prämie P_x

$$P_x = \frac{a_x^{ai}}{a_x^a}$$

Umlagesystem L_T

$L_T = n_T B_T$ für T, T+1,....

Barwerte und Anwartschaftsbarwerte

Die verwendeten Bezeichnungen lehnen sich an die von Prof. Dr. Klaus Heubeck herausgegebenen Richttafeln an. Alle Werte beziehen sich stets auf den Jahresbetrag 1.

Barwerte

Barwert für abgekürzte Aktivenrente

(Heubeck-Verweis 3.1.1)

Barwert einer vorschüssigen Aktivenrente, die an einen x-jährigen Aktiven für die Dauer von maximal z-x Jahren zu zahlen ist.

jährlich Zahlungsweise $$a^a_{x\overline{z-x|}} = \frac{N^a_x}{D^a_x}$$

monatliche Zahlungsweise $$^{(12)}a^a_{x\overline{z-x|}} = a^a_{x\overline{z-x|}} - k(12) \cdot \left(1 - \frac{D^a_z}{D^a_x}\right)$$

Barwert für abgekürzte Invalidenrente

(Heubeck-Verweis 3.1.2)

Barwert einer vorschüssigen Invalidenrente, die an einen x-jährigen Invaliden für die Dauer von maximal z-x Jahren zu zahlen ist.

jährliche Zahlungsweise $$a^i_{x\overline{z-x|}} = \frac{N^i_x}{D^i_x}$$

monatliche Zahlungsweise $$^{(12)}a^i_{x\overline{z-x|}} = a^i_{x\overline{z-x|}} - k(12) \cdot \left(1 - \frac{D^i_z}{D^i_x}\right)$$

Barwert für Altersrente

(Heubeck-Verweis: 3.1.3)

Barwert einer vorschüssigen Altersrente, die an einen x-jährigen Altersrentner lebenslänglich zu zahlen ist.

jährliche Zahlungsweise $$a_x^r = \frac{N_x^r}{D_x^r}$$

monatliche Zahlungsweise $$^{(12)}a_x^r = \frac{N_x^r}{D_x^r} - k^{(12)} = \frac{1}{D_x^r}\sum_{k=x}^{\omega} D_k^r - k^{(12)}$$

Barwert für aufgeschobene Altersrente für Aktive

(Heubeck-Verweis: 3.1.4)

Barwert einer vorschüssigen Altersrente, die an einen x-jährigen Aktiven nach Aufschub auf das Alter z lebenslänglich zu zahlen ist.

monatliche Zahlungsweise $$^{(12)}_{z-x}a_x^{aA} = \frac{D_z^a}{D_x^a} \cdot {}^{(12)}a_z^r$$

Barwert für aufgeschobene Altersrente für Invalide

(Heubeck-Verweis: 3.1.4)

Barwert einer vorschüssigen Altersrente, die an einen x-jährigen Invaliden nach Aufschub auf das Alter z lebenslänglich zu zahlen ist.

monatliche Zahlungsweise $$^{(12)}_{z-x}a_x^{iA} = \frac{D_z^i}{D_x^i} \cdot {}^{(12)}a_z^r$$

Lebenslängliche Invalidenrente

(Heubeck-Verweis: 3.1.5)

Barwert einer vorschüssigen Invalidenrente, die an einen x-jährigen Invaliden lebenslänglich zu zahlen ist.

jährliche Zahlungsweise $$a_x^i = \frac{1}{D_x^i} \sum_{k=x}^{\omega} D_k^i = a^i_{x\overline{z-x}|} + {}_{z-x}a_x^{iA}$$

monatliche Zahlungsweise $${}^{(12)}a_x^i = a_x^i - k^{(12)} \quad = {}^{(12)}a^i_{x\overline{z-x}|} + {}^{(12)}_{z-x}a_x^{iA}$$

Lebenslängliche Witwenrente

(Heubeck-Verweis: 3.1.6)

Barwert einer vorschüssigen Witwenrente, die an eine y-jährige Witwe lebenslänglich zu zahlen ist.

jährliche Zahlungsweise $$a_y^w = \frac{1}{D_y^w} \sum_{k=y}^{\omega} D_k^w$$

monatliche Zahlungsweise $${}^{(12)}a_y^w = a_y^w - k^{(12)}$$

Anwartschaftsbarwerte

Anwartschaftsbarwert eines Altersrentners auf Witwenrente

(Heubeck-Verweis: 3.2.1)

Barwert einer Anwartschaft eines x-jährigen Altersrentners auf eine lebenslänglich vorschüssige Witwenrente.

$$a_x^{rw} = \frac{N_x^{rw}}{D_x^r}$$

Anwartschaft eines Invaliden auf Witwenrente

(Heubeck-Verweis: 3.3.2)

Barwert einer Anwartschaft eines x-jährigen Invaliden auf eine lebenslänglich vorschüssige Witwenrente.

$$a_x^{iw} = \frac{N_x^{iw}}{D_x^i}$$

Anwartschaft eines Aktiven auf abgekürzte Invalidenrente

(Heubeck-Verweis:3.4.2)

Barwert einer Anwartschaft eines x-jährigen Aktiven auf eine monatlich vorschüssige Invalidenrente. Diese Rente wäre im Leistungsfall maximal bis zum Alter z zu zahlen.

$$^{(12)}a_x^{ai(z)} = \frac{N_x^{ai(z)}}{D_x^a}$$

mit

$$N_x^{ai(z)} = \sum_{k=x}^{z-1} D_k^{ai(z)}$$

wobei

$$D_x^{ai(z)} = D_x^a \cdot i_x \cdot {}^{(12)}a^i_{x+\frac{1}{2}\overline{z-x-\frac{1}{2}}|}\sqrt{v}$$

und

$$^{(12)}a^i_{x+\frac{1}{2}\overline{z-x-\frac{1}{2}}|} = \frac{1-q_x^i}{1-0{,}5q_x^i}\sqrt{v}\left(a^i_{x+1\overline{z-x-1}|} + \frac{D_z^i \cdot k^{(12)}}{D_{x+1}^i}\right)$$

Anwartschaft eines Aktiven auf lebenslange Invalidenrente

(Heubeck-Verweis:3.4.3)

Barwert einer Anwartschaft eines x-jährigen Aktiven auf eine lebenslänglich vorschüssige Invalidenrente.

$$a_x^{ai} = \frac{N_x^{ai}}{D_x^a}$$

mit

$$N_x^{ai} = \sum_{k=x}^{z-1} D_k^{ai}$$

wobei

$$D_x^{ai} = D_x^a \, i_x \, a_{x+\frac{1}{2}}^i \sqrt{v}$$

und

$$a_{x+\frac{1}{2}}^i = \frac{1-q_x^i}{1-0{,}5q_x^i} \sqrt{v} \, a_{x+1}^i$$

Anwartschaft eines Aktiven auf Invaliden- und Altersrente

(Heubeck-Verweis:3.4.4)

Barwert einer Anwartschaft eines x-jährigen Aktiven auf eine monatlich vorschüssige Invaliden- und Altersrente. Die Invalidenrente wäre lebenslang, die Altersrente ab dem Alter zu zahlen.

$$^{(12)}a_x^{aiA} = a_x^{ai} + {}_{z-x}^{(12)}a_x^{aA}$$

Anwartschaft eines Aktiven auf Altersrente

(Heubeck-Verweis:3.4.5)

Barwert einer Anwartschaft eines x-jährigen Aktiven auf vorschüssige Altersrente. Die Rente ist monatlich ab dem Renteneintrittsalter z zu zahlen, unabhängig davon, ob der Empfänger beim Erreichen dieses Alters aktiv oder invalide ist.

$$a_x^A := {}^{(12)}a_x^{aiA} - {}^{(12)}a_x^{ai(z)}$$

Anwartschaft eines Aktiven auf Witwenrente durch Aktivtod

(Heubeck-Verweis: 3.4.6)

Barwert einer Anwartschaft eines x-jährigen Aktiven auf eine lebenslängliche Witwenrente. Dabei muss der Tod als Aktiver oder Altersrentner eingetreten sein, jedoch darf eine vorhergehende Invalidität nicht eingetreten sein.

$$a_x^{aaw} = \frac{N_x^{aaw}}{D_x^a}$$

mit

$$N_x^{aaw} = \sum_{k=x}^{z-1} D_k^a q_k^{aa} h_k a_{y(k)+\frac{1}{2}}^w \sqrt{v} + D_z^a a_z^{rw}$$

wobei

$$a_{y+\frac{1}{2}}^w = \frac{1-q_y^w}{1-0{,}5q_y^w} a_{y+1}^w \sqrt{v}$$

Anwartschaft eines Aktiven auf Witwenrente nach Invalidentod

(Heubeck-Verweis: 3.4.6)

Barwert einer Anwartschaft eines x-jährigen Aktiven auf eine lebenslängliche Witwenrente. In diesem Fall ist der Tod nach vorhergehender Invalidität eingetreten.

$$a_x^{aiw} = \frac{N_x^{aiw}}{D_x^a}$$

mit

$$N_x^{aiw} = \sum_{k=x}^{z-1} D_k^a \, i_k \, a_{k+\frac{1}{2}}^{iw} \sqrt{v}$$

wobei

$$a_{x+\frac{1}{2}}^{iw} = \frac{1-q_x^i}{1-0{,}5q_x^i} \sqrt{v} \, a_{x+1}^{iw} + \frac{0{,}5q_x^i}{1-0{,}5q_x^i} h_x \, a_{y(x)+\frac{2}{3}}^{w} v^{\frac{1}{6}}$$

und

$$a_{y+\frac{2}{3}}^{w} = \frac{1-q_y^w}{1-\frac{2}{3}q_y^w} v^{\frac{1}{3}} a_{y+1}^{w}$$

Anwartschaft eines Aktiven auf Witwenrente

(Heubeck-Verweis: 3.4.6)

Barwert einer Anwartschaft eines x-jährigen Aktiven auf eine lebenslängliche Witwenrente.

$$a_x^{aw} = a_x^{aaw} + a_x^{aiw}$$

Ergänzungen zur Formelsammlung

Bezeichnungen

x	Alter bei Finanzierungsbeginn
z	Alte Renteneintritt
m	zum Stichtag abgeleistete Jahre nach Finanzierungsbeginn
n	Anzahl gesamt möglicher Dienstjahre zwischen Finanzierungsbeginn und Renteneintritt
V	übernommener Vermögenswert in Euro
Aktive	Anwärter im aktivem Dienst
ehemalig Aktive	Ausgeschiedene mit unverfallbarer Anwartschaft

Teilwertverfahren

Für Aktive mit m > 0 ; x+m < z gilt:

$$ {}_mV_x = A_{x+m} - P_x \cdot a^a_{x+m,\overline{n-m}|} $$

mit

$$ P_x = \frac{A_x}{a^a_{x,\overline{n}|}} $$

Für ehemalig Aktive und Leistungsempfänger gilt:

$$ {}_mV_x = A_{x+m} $$

modifiziertes Teilwertverfahren (nach Engbroks)

Für Aktive mit m > 0 ; x+m < z gilt:

$$ {}_mV_x^{mod} = A_{x+m} - P_x^{mod} \cdot a_{x+m\,\overline{n-m}|} $$

mit $$ P_x^{mod} = \frac{v^m A_{x+m}}{a_{\overline{m}|} + v^m \cdot a_{x+m\,\overline{n-m}|}} $$

Übernommener Vermögenswert bei Arbeitgeberwechsel

Für Aktive mit m > 0 ; x+m < z gilt:

$$ {}_{m}V_x = A_{x+m} - P_x \cdot \mathbf{a}^{a}_{x+m,\overline{n-m}|} $$

mit

$$ P_x = \frac{A_x - V}{\mathbf{a}^{a}_{x,\overline{n}|}} $$